# حل مسائل غیرخطی الاستیک تراکم‌پذیر بااستفاده‌از روش تحلیل ایزوژئومتریک*

مهدی اردیانی(۱) بهروز حسنی(۲) سیدمهدی توکلی(۳)

**چکیده** کاربرد روش تحلیلی ایزوژئومتریک برای حل مسائل غیرخطی الاستیک تراکم‌پذیر موسوم به مسائل هایپرالاستیسیته موضوع این مقاله است. بدین‌منظور جهت استخراج ماتریس ضرایب با بهره‌گیری از مفهوم ایزوژئومتریک، پس از خطی‌سازی روابط حاکم، معادلات تعادل در فرم گسسته‌شدهٔ آن نوشته شده و در ادامه الگوریتمی برای تحلیل این دسته از مسائل ارائه می‌گردد. برای بررسی کارایی روش و صحت نتایج به‌دست‌آمده در مسائل هایپرالاستیسیتهٔ تراکم‌پذیر، نتایج حاصل از روش‌های اجزای محدود و ایزوژئومتریک با یکدیگر مقایسه می‌شود. استفاده از روش پیشنهادی علاوه بر امکان ایجاد هندسهٔ مدل با دقت و انعطاف‌پذیری بیشتر، باعث تشکیل دستگاه معادلات کوچکتر و در کل کاهش حجم محاسبات می‌شود. به‌علاوه، علیرغم وجود تغییرشکل‌های بزرگ، وابستگی به نحوهٔ گسسته‌سازی مسائل حداقل بوده و برخلاف روش اجزای محدود تا حد بسیار زیادی نیاز به تولید مجدد شبکه اجزای محدود وجود ندارد. همچنین، در این مقاله به بررسی تأثیر تعداد تقسیمات بار و نیز تعداد نقاط انتگرال‌گیری گوسی در همگرایی جواب مسائل پرداخته شده است.

**واژه‌های کلیدی** تحلیل ایزوژئومتریک، نربز، هایپرالاستیسیته، مصالح تراکم‌پذیر.

# Solution of Nonlinear Compressible Hyperelastic Problems by Isogeometric Analysis Method

M. Ardiani B. Hassani M. Tavakoli

**Abstract** *Employing the Isogeometric Analysis method for solution of nonlinear compressible elastic materials, generally known as hyperelasticity, is the subject of this article. For this purpose, the matrix of coefficients is derived and by the linearization of governing equations the discretized equilibrium equations are obtained and a solution algorithm is presented. To study the performance and accuracy of the method in compressible hyperelastic problems, the obtained results are compared with those of finite elements. The presented approach, besides providing a good flexibility in geometrical modeling, results in a smaller system of equations and consequently reducing the computational cost. Furthermore, despite having large deformations, the need for remeshings is alleviated. Also, the effects of the number of load increments, as well as, the number of Gauss integration points on the convergence of the solution are studied.*

**Key Words** Isogeometric analysis, NURBS, Hyperelasticity, Compressible materials.

*تاریخ دریافت مقاله ۹۶/۳/۲۷ و تاریخ پذیرش آن ۹۷/۶/۲۱ می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v30i2.65185

(۱) دانشجوی دکترای هوا فضا، گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

(۲) نویسندهٔ مسئول: استاد، گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد. b_hassani@um.ac.ir

(۳) استادیار، دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود.

## مقدمه

برای طراحی ایمن و استفاده بهینه از ظرفیت مصالح، در نظر گرفتن تغییرشکل‌های ارتجاعی بزرگ در مواد موسوم به هایپرالاستیک، حائز اهمیت است. رفتار غیرخطی در ناحیهٔ ارتجاعی سبب ایجاد منحنی غیرخطی تنش- کرنش در مدل‌سازی رفتار مصالح می‌شود. با استفاده از تعریف تابع انرژی کرنشی ذخیره شده معادلات حاکم بر مسائل تراکم‌پذیر با تغییرشکل‌های بزرگ نتیجه می‌شود. با خطی‌سازی روابط حاکم، الگوریتم حل با استفاده از روش نیوتن- رافسون حاصل می‌شود.

نخستین تلاش جهت حل مسائل غیرخطی الاستیک با استفاده از روش اجزای محدود توسط ترنر و همکارانش [1] انجام شد. از جمله سایر تحقیقات اولیه بر پایهٔ روش اجزای محدود در این زمینه، حل مسئلهٔ کمانش توسط کاپور [2]، گالاگر و پادلوگ [3]، کالاگر و همکاران [4] و هولاند و موآن[5] را می‌توان نام برد. ترنر و همکارانش [1] و ارگریس [6-7] فرآیند اعمال تدریجی بار در چندین مرحله را پیشنهاد کردند و اُدن [8]، مالت و مارکل [9] استفاده از روش حل برمبنای تکرار نیوتن- رافسون را مطرح نمودند. بهبود روش نیوتن- رافسون توسط اُدن [10]، هایسر و همکارانش [11] و زینکوویچ [12] مورد پژوهش قرار گرفت و بربیا و کونر [13] روش اعمال تدریجی بار و ایجاد همگرایی در هر مرحله افزایش بار را پیشنهاد نمودند. برای آشنایی بیشتر با مفاهیم و روش‌های حل مسائل غیرخطی، اعم از مصالح و هندسه، مطالعهٔ مراجع [14-20] توصیه می‌شود.

مدل‌سازی هندسه‌های پیچیده بااستفاده‌از توابع پایه متشکل از اسپلاین‌ها شامل توابع بی‌اسپلاین (B-spline)، نربز (NURBS – Non Uniform Rational B-Splines) و تی‌اسپلاین‌ها (T-spline) [21,22] در طراحی و تحلیل به‌کمک کامپیوتر (Computer Aided Design) حائز اهمیت می‌باشد.

نخستین بار هیوز و همکارانش [23] استفاده از این توابع پایه در مدل‌سازی هندسه و تقریب تابع مجهول مسائل مهندسی را با نام روش تحلیلی ایزوژئومتریک پیشنهاد نمودند. مراجع [24-34] جهت آشنایی بیشتر با مفاهیم بنیادی روش تحلیلی ایزوژئومتریک معرفی می‌شوند.

به‌دلیل قابلیت انعطاف‌پذیری زیاد توابع پایه نربز در تولید هندسه‌های پیچیده، استفاده از آن در روش تحلیل ایزوژئومتریک فرآیند تولید مش مجدد در مسائل غیرخطی الاستیک تراکم‌پذیر تا حد زیادی رفع و در نتیجه سرعت حل در مقایسه با روش اجزای محدود افزایش می‌یابد. هیوز و همکاران [35] برای اولین بار روش ایزوژئومتریک را برای حل مسائل دارای تغییرشکل‌های بزرگ مورد استفاده قرار دادند.

در ادامه این مقدمه، در بخش دوم مقاله ابتدا فرمول‌بندی مصالح هایپرالاستیسیته «تراکم‌پذیر» به اختصار بیان شده و معادلهٔ تعادل حاکم بر این دسته از مسائل ارائه می‌شود. به‌دلیل غیرخطی بودن این دسته از مسائل، به‌منظور امکان استفاده از روش حل تکراری نیوتن- رافسون خطی‌سازی انجام می‌پذیرد. در بخش سوم روش ایزوژئومتریک به‌طور خلاصه توضیح داده می‌شود و گسسته‌سازی توابع مجهول و هندسه در مسائل خطی‌سازی‌شدهٔ هایپرالاستیسیته توسط توابع پایه و متغیرهای کنترلی مطرح می‌گردد. انتهای این بخش به بیان الگوریتمی برای مسائل غیرخطی ارتجاعی تراکم‌پذیر بر پایهٔ روش تحلیلی ایزوژئومتریک اختصاص یافته است. در بخش چهارم، ضمن ارائهٔ چند مثال از مسائل هایپرالاستیک تراکم‌پذیر، نتایج به‌دست‌آمده با روش اجزای محدود مقایسه می‌شود. در ادامه، به بررسی تأثیر تعداد نقاط انتگرال‌گیری گوسی و نیز تعداد تقسیمات بار در همگرایی جواب پرداخته می‌شود.

## هایپرالاستیسیتهٔ تراکم‌پذیر

در این نوع از مسائل، بااستفاده‌از مفهوم گرادیان تغییرشکل‌ها $\mathbf{F}$ باتوجه‌به استقلال کار انجام‌شده از مسیر در این نوع مصالح برای هر نقطه از جسم مانند $\mathbf{X}$ و با توجه به نقطهٔ آغازین و پایانی مسیر، تابع انرژی کرنشی ذخیره‌شده بر واحد حجم تغییرشکل‌نیافته $\psi$ به‌صورت زیر قابل تعریف می‌باشد [14,15,17]:

$$\psi(\mathbf{F}(\mathbf{X}),\mathbf{X})=\int_{t_0}^{t}\mathbf{P}(\mathbf{F}(\mathbf{X}),\mathbf{X}):\dot{\mathbf{F}}\,dt \qquad (۱)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{F}(\mathbf{X}),\mathbf{X})=\frac{\partial\psi(\mathbf{F}(\mathbf{X}),\mathbf{X})}{\partial\mathbf{F}} \qquad (۲)$$

که در رابطهٔ فوق، $\dot{\mathbf{F}}$ نرخ تغییرات تابع گرادیان و $\mathbf{P}(\mathbf{F}(\mathbf{X}),\mathbf{X})$ تانسور تنش پیولا-کیرشهف اول می‌باشد. با بازنویسی رابطهٔ بیان‌شده برحسب تنش پیولا- کیرشهف دوم یعنی $\mathbf{S}$ خواهیم داشت:

$$\psi(\mathbf{C}(\mathbf{X}),\mathbf{X})=\int_{t_0}^{t}\mathbf{S}(\mathbf{C}(\mathbf{X}),\mathbf{X}):\dot{\mathbf{C}}\,dt \qquad (۳)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{C}(\mathbf{X}),\mathbf{X})=2\frac{\partial\psi(\mathbf{C}(\mathbf{X}),\mathbf{X})}{\partial\mathbf{C}} \qquad (٤)$$

که در این روابط، $\mathbf{E}$ تانسور کرنش لاگرانژی، $\mathbf{C}$ تانسور گرین-کوشی راست و $\dot{\mathbf{C}}$ نرخ تغییرات این تانسور است [14,15,17]. نظر به غیرخطی بودن رابطهٔ تنش و کرنش در معادلهٔ فوق، با خطی‌سازی این رابطه در دستگاه مختصات لاگرانژی ماتریس مرتبهٔ چهار الاستیسیته $\tilde{\mathbf{C}}$ به‌صورت زیر حاصل می‌شود [14,15,17]

$$\mathrm{D}\mathbf{S}[\mathbf{u}]=\tilde{\mathbf{C}}:\mathrm{D}\mathbf{E}[\mathbf{u}] \qquad (۵)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}=\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{E}}=2\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{C}}=4\frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{C}\,\partial\mathbf{C}} \qquad (٦)$$

با در نظر گرفتن همسانگردی برای مواد، رابطهٔ بین $\psi$ و تانسورهای گرین- گوشی راست $\mathbf{C}$ و چپ $\mathbf{b}$ تنها وابسته به نامتغیرهای (Invariants) مادهٔ ایزوتروپیک می‌باشد و درنتیجه تانسور تنش پیولا-کیرشهف دوم $\boldsymbol{S}$ و تانسور تنش کوشی $\boldsymbol{\sigma}$ با تعریف در دستگاه لاگرانژی و اویلری، به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند [14,15,17].

$$\begin{aligned}\mathbf{S}&=2\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{C}}=2\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{I_C}}\frac{\partial \mathrm{I_C}}{\partial\mathbf{C}}\\&+2\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{II_C}}\frac{\partial \mathrm{II_C}}{\partial\mathbf{C}}+2\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{III_C}}\frac{\partial \mathrm{III_C}}{\partial\mathbf{C}}\\&=2\psi_{\mathrm{I}}\,\mathrm{I}+4\psi_{\mathrm{II}}\,\mathbf{C}+2\mathrm{J}^2\,\psi_{\mathrm{III}}\,\mathbf{C}^{-1}\end{aligned} \qquad (۷)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}&=\mathrm{J}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}=\\&=2\mathrm{J}^{-1}\psi_{\mathrm{I}}\,\mathbf{b}+4\mathrm{J}^{-1}\psi_{\mathrm{II}}\,\mathbf{b}^2+2\mathrm{J}\,\psi_{\mathrm{III}}\,\mathrm{I}\end{aligned} \qquad (۸)$$

که در روابط فوق $\mathrm{I_C},\mathrm{II_C},\mathrm{III_C}$ نامتغیرهای تانسور $\mathbf{C}$، $\mathbf{J}$ دترمینان گرادیان تغییرشکل‌ها (Volume Change) و $\psi_{\mathrm{I}}=\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{I_C}},\psi_{\mathrm{II}}=\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{II_C}},\psi_{\mathrm{III}}=\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{III_C}}$ است.

از جمله مدل‌های مواد ایزوتروپیک می‌توان از روابط پیشنهادی اگدن، نئو-هوکین، یئو و غیره می‌باشد که بااستفاده‌از روابط بالا، تانسورهای تنش و الاستیسیتهٔ آنها در وضعیت تراکم‌پذیری قابل حصول می‌باشد. در ادامهٔ این مقاله از مدل مصالح نئو- هوکین تراکم‌پذیر استفاده شده است.

با توجه به تابع انرژی کرنشی مورد استفاده، شرایط مرزی و شرایط بارگذاری در مسائل غیرخطی هندسی و مواد، معادلهٔ کار مجازی $\delta\mathrm{W}$ برمبنای سرعت مجازی $\delta\mathbf{v}$ قابل تعریف بوده و منجر به رابطهٔ غیرخطی (۹) می‌گردد که نیازمند خطی‌سازی هر یک از مؤلفه‌های معادله است. در روابطی که در ادامه می‌آید، $\mathbf{u}$ میدان جابه‌جایی ذره، $\mathbf{f}$ نیروهای کالبدی نظیر وزن، $\boldsymbol{\varepsilon}$ تانسور کرنش اویلری، $\mathbf{t}$ نیروهای سطحی

نظیر نیروی فشار $\mathbf{t}=p\mathbf{n}$ و $\mathbf{d}$ نرخ تغییرشکل‌ها است [14,15,17].

$$\begin{aligned}\delta W(\phi,\delta\mathbf{v}) &= \delta W_{int}(\phi,\delta\mathbf{v}) - \delta W_{ext}(\phi,\delta\mathbf{v})\\ &= \left(\int_v \boldsymbol{\sigma}:\delta\mathbf{d}\,dv\right) - \left(\int_v \mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{v}\,dv + \int_v \mathbf{t}\cdot\delta\mathbf{v}\,da\right)\\ &= 0\end{aligned} \qquad (۹)$$

جملهٔ دوم رابطهٔ فوق قابل تفکیک به کارهای مجازی داخلی و خارجی به‌شرح زیر است:

$$\delta W(\phi,\delta\mathbf{v})[\mathbf{u}] + D\delta W(\phi,\delta\mathbf{v})[\mathbf{u}] = 0 \qquad (۱۰)$$

$$\begin{aligned}&D\delta W_{int}(\phi,\delta\mathbf{v})[\mathbf{u}]\\ &= \int_V D\mathbf{E}[\delta\mathbf{v}] : \tilde{\mathbf{C}} : D\mathbf{E}[\mathbf{u}]\,dV\\ &+ \int_V \mathbf{S} : \left[(\nabla_0\mathbf{u})^T(\nabla_0\mathbf{u})\right] dV = \int_v \delta\mathbf{d} : \tilde{\mathbf{c}} : \boldsymbol{\varepsilon}\,dv\\ &+ \int_V \boldsymbol{\sigma} : \left[(\nabla\mathbf{u})^T(\nabla\mathbf{u})\right] dv\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

$$\begin{aligned}&D\delta W_{ext}(\phi,\delta\mathbf{v})[\mathbf{u}]\\ &= D\delta W_{ext}^{\mathbf{f}}(\phi,\delta\mathbf{v})[\mathbf{u}] + D\delta W_{ext}^{p}(\phi,\delta\mathbf{v})[\mathbf{u}]\\ &= 0 + \frac{1}{2}\int_{A_\xi} p\,\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi}\cdot\left[\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\eta}\times\delta\mathbf{v}\right) + \left(\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial\eta}\times\mathbf{u}\right)\right] d\xi d\eta\\ &- \frac{1}{2}\int_{A_\xi} p\,\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\eta}\cdot\left[\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\xi}\times\delta\mathbf{v}\right) + \left(\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial\xi}\times\mathbf{u}\right)\right] d\xi d\eta\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

که در این روابط داریم:

$$n = \frac{\dfrac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi}\times\dfrac{\partial\mathbf{x}}{\partial\eta}}{\left\|\dfrac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi}\times\dfrac{\partial\mathbf{x}}{\partial\eta}\right\|} \quad ; \quad da = \left\|\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi}\times\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\eta}\right\| d\xi d\eta \qquad (۱۳)$$

## تحلیل ایزوژئومتریک در مسائل هایپرالاستیسیته

پیشرفت‌های صنعت طراحی به‌کمک کامپیوتر در مدل‌سازی هندسی اساس روش تحلیل ایزوژئومتریک است [23]. در این روش مدل‌سازی خطوط منحنی، سطوح و احجام با استفاده از توابع پایه بی‌اسپلاین و انواع ارتقایافتهٔ آن، نظیر نربز و تی‌اسپلاین، انجام می‌شود. با تقریب مجهولات مسئله - در اینجا مؤلفه‌های تغییرمکان‌ها- به‌وسیلهٔ توابع نربز و نقاط کنترلی و جای‌گذاری آنها در معادلهٔ دیفرانسیل حاکم بر مسئله به حل آن پرداخته می‌شود. حل مسئله به‌صورت رویه‌ای از پاسخ با گسسته‌سازی محیط پیوسته به‌وسیلهٔ این نقاط کنترلی و استفادهٔ آنها در تقریب تابع مجهول ساخته می‌شود. این همان نگاه استفاده از شبکه در روش تفاضل‌های محدود، المان‌ها در روش اجزای محدود یا مجموعه‌ای از نقاط در روش‌های بدون شبکه می‌باشد. حسنی و مقدم [36] و حسنی و همکاران [37] توانایی این ایده در حل معادلات دیفرانسیل معمولی را مورد بررسی قرار داده و همچنین نتایج بسیار خوبی در مکانیک محاسباتی توسط هیوز و گروه تحقیقاتی آن گزارش شده است [24-34]. برخی از مزایای روش تحلیل ایزوژئومتریک در مقایسه با سایر روش‌های عددی چنین است:

- تعریف هندسه و مرزهای مدل با دقت و انعطاف‌پذیری بالا
- کاهش حجم محاسبات و حصول دستگاه معادلات کوچکتر در مقایسه با سایر روش‌های عددی برای به‌دست آوردن دقت حل مشابه.
- عدم نیاز به مش‌بندی مجدد به‌سبب انعطاف بالا در فرآیند حل مسائلی که با تغییر دامنه مواجه هستند مانند مسائل با تغییرشکل‌های بزرگ، مسائل بهینه‌سازی، مسائل با دیدگاه لاگرانژی و غیره.

لازم به ذکر است که علیرغم مزایای این روش عدم قرارگیری نقاط کنترلی بر روی هندسه و رویه جواب مسئله از جمله مشکلات این روش می‌باشد. به‌بیان دیگر، با در دست داشتن نقاط در فضای فیزیکی برای یافتن متناظر آنها در فضای پارامتری نیازمند حل دستگاه معادله‌ای به‌صورت معکوس می‌باشیم.

***نحوۀ تعریف سطوح و احجام.*** برای تعریف سطوح و احجام از توابع پایه اسپلاین‌ها و به‌ویژه توابع نربز به‌صورت زیر استفاده می‌شود:

$$S(\xi,\eta)=\sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2} R_{i,j}(\xi,\eta)\,P_{i,j} \quad (۱۴)$$

$$V(\xi,\eta,\varsigma)=\sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2}\sum_{k=0}^{n_3} R_{i,j,k}(\xi,\eta,\varsigma)\,P_{i,j,k} \quad (۱۵)$$

$$R_{i,j}(\xi,\eta)=\frac{N_{i,p_1}(\xi)\,N_{j,p_2}(\eta)\,\omega_{i,j}}{\sum_{e=0}^{n_1}\sum_{f=0}^{n_2} N_{e,p_1}(\xi)\,N_{f,p_2}(\eta)\,\omega_{e,f}} \quad (۱۶)$$

که در این روابط $P_{i,j}$ معرف نقاط کنترلی، به‌تعداد $(n_1+1)\times(n_2+1)$ هستند که برای تعریف هندسه به‌کار می‌روند. همچنین، $n_1$ و $n_2$ تعداد توابع پایه بی‌اسپلاین، $\omega_{i,j}$ وزن مرتبط با هر نقطه و $N_{i,p_1}(\xi)\,N_{j,p_2}(\eta)$ توابع پایه بی‌اسپلاین به‌ترتیب در راستای $\xi$ و $\eta$ با مرتبۀ چند جمله‌ای $p_1$ و $p_2$ می‌باشد. در این روابط، $i$اُمین تابع بی‌اسپلاین با بردار گرهی $\xi=\{\xi_0,\xi_1,\xi_2,...,\xi_{m_1}\}$ از درجۀ $p_1$ در راستای $\xi$ توسط رابطۀ بازگشتی زیر تعریف می‌گردد.

$$N_{i,0}(r)=\begin{cases}1 & \text{if } \xi_i\le\xi\le\xi_{i+1}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \quad (۱۷)$$

$$N_{i,p_1}=\frac{\xi-\xi_i}{\xi_{i+p_1}-\xi_i}N_{i,p_1-1}(\xi)+\frac{\xi_{i+p_1+1}-\xi}{\xi_{i+p_1+1}-\xi_{i+1}}N_{i+1,p_1-1}(\xi) \quad (۱۸)$$

در روش ایزوژئومتریک استفاده از بردارهای گرهی موسوم به باز یا نامتناوب متداول‌تر است. در این نوع بردارهای گرهی، گره ابتدا و انتها به‌تعداد $p+1$ بار تکرار می‌شوند و درنتیجه تعداد نقاط گرهی در بردار مزبور $m=n+p+1$ می‌باشد. همچنین در فاصلۀ گره‌ای $[\xi_i,\xi_{i+1})$ به‌تعداد $p+1$ تابع پایه‌ای غیرصفر وجود دارد که عبارتند از $N_{i-p,p}(\xi), N_{i-p+1,p}(\xi),...,N_{i,p}(\xi)$ [21-22]. در روش ایزوژئومتریک، هندسۀ مسئله با استفاده از توابع پایه و نقاط کنترلی مربوطه تعریف می‌شود. در ادامه از همین نقاط کنترلی و توابع پایه برای تقریب‌سازی رویه مؤلفه‌های جواب، با افزودن یک مؤلفه به مؤلفه‌های نقاط کنترلی به‌کاررفته در تعریف هندسه، استفاده می‌شود. این بدان معنی است که با در نظر گرفتن هندسه در فضای دو یا سه‌بعدی، بردار کنترلی مؤلفه‌های جواب مسئله از یک بعد بالاتر خواهند بود.

***نحوۀ گسسته‌سازی.*** مشابه مفهوم ایزوپارامتری در روش اجزای محدود متغیرهای توصیف‌کنندۀ هندسه در دستگاه‌های مختصات مادی (لاگرانژی) و فضایی (اولری) و نیز توابع مجهول در مسائل هایپرالاستیسیته تراکم‌پذیر مطابق روابط زیر تقریب‌سازی می‌شوند. همان‌گونه که از دقت در این روابط ملاحظه می‌شود، بدین‌ترتیب کلیه متغیرها اعم از اولیه و ثانویه برحسب مختصات نقاط کنترلی تبیین می‌شوند که مترادف با گسسته‌سازی در سایر روش‌های عددی است؛ مانند نقاط گرهی در روش اجزای محدود.

$$\mathbf{X}=\sum_{a=1}^{n}R_a(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\,X_{pa} \quad (\text{۱۹- الف})$$

$$\mathbf{x}=\sum_{a=1}^{n}R_a(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\,x(t)_{pa} \quad (\text{۱۹- ب})$$

$$\mathbf{v}=\sum_{a=1}^{n}R_a(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\,v_{pa} \quad (\text{۱۹- ج})$$

$$\mathbf{u}=\sum_{a=1}^{n}R_a(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\,u_{pa} \quad (\text{۱۹- د})$$

$$\mathbf{F}=\sum_{a=1}^{n}x_{pa}\otimes\nabla_0 R_a \quad (\text{۱۹- ه})$$

$$\mathbf{C}=\sum_{a=1}^{n}\left(x_{pa}\cdot x_{pa}\right)\nabla_0 R_a\otimes\nabla_0 R_b \quad (\text{۱۹- و})$$

$$\mathbf{b}=\sum_{a=1}^{n}\nabla_0 R_a\cdot\nabla_0 R_b\left(x_{pa}\otimes x_{pa}\right) \quad (\text{۱۹- ز})$$

لازم به توضیح است که محاسبهٔ $\nabla R, \nabla_0 R$ با انتقال از فضای فیزیکی به فضای پارامتری باتوجه‌به تعریف توابع شکل نربزی R به‌وسیلهٔ بردارهای گره‌ای به‌صورت زیر امکان‌پذیر می‌باشد:

$$\nabla_0 R = \frac{\partial R}{\partial X} = \frac{\partial R}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{\partial R}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial X} + \frac{\partial R}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial X} \qquad (۲۰)$$

$$\nabla R = \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} \qquad (۲۱)$$

که در این روابط $R_a$ توابع شکل، n تعداد نقاط کنترلی مرتبط با آن، $x_{pa}$ مختصات جدید متغیر کنترلی در دستگاه اویلری، $X_{pa}$ مختصات جدید متغیر کنترلی در دستگاه لاگرانژی، $v_{pa}$ سرعت متغیر کنترلی و $u_{pa}$ مؤلفه‌های جابه‌جایی متغیر کنترلی می‌باشند.

همان‌گونه که در بالا توضیح داده شد، با خطی‌سازی رابطهٔ کار مجازی برمبنای سرعت، رابطهٔ (۱۰) حاصل می‌شود که در آن اولین مؤلفهٔ معادله بیانگر کار نیروهای خارجی $\mathbf{F}(x)$ و داخلی $\mathbf{T}(x)$ و دومین مؤلفه بیانگر شیب منحنی نیرو–جابه‌جایی $\mathbf{K}(x)$ است. در ادامه، با بهره‌گیری از روابط (۱۹) در فضای گسسته، معادلهٔ خطی‌سازی‌شدهٔ فوق را باتوجه‌به متغیرهای کنترلی بازنویسی نموده و از روش حل برمبنای تکرار نیوتن- رافسون استفاده می‌شود. معادلهٔ کار مجازی در روش ایزوژئومتریک به رابطهٔ (۲۲) تبدیل می‌شود که در آن aها معرف متغیرهای کنترلی دامنهٔ مسئله و eها نشان‌دهندهٔ المان‌های گرهی (knot elements) مربوطه هستند.

$$\begin{aligned}\delta W(\phi, \delta \mathbf{v}) &= \sum_{a=1}^{N} \delta W(\phi, R_a \delta \mathbf{v}_a) \\ &= \sum_{a=1}^{N} \delta \mathbf{v}_a (\mathbf{T}_a - \mathbf{F}_a) = \sum_{a=1}^{N} \sum_{\substack{e=1 \\ e \in a}}^{N} \delta \mathbf{v}_a \int_{v^{(e)}} \boldsymbol{\sigma} \nabla R_a \, dv \\ &- \sum_{a=1}^{N} \sum_{\substack{e=1 \\ e \in a}}^{N} \delta \mathbf{v}_a \Big( \int_{v^{(e)}} R_a \mathbf{f} \, dv + \int_{\partial v^{(e)}} R_a \mathbf{t} \, da \Big) = 0\end{aligned} \qquad (۲۲)$$

که این رابطه معادل است با

$$\mathbf{R}_a = \mathbf{T}_a - \mathbf{F}_a = 0 \qquad (۲۳)$$

که $\mathbf{R}_a$ باقیماندهٔ نیروها در متغیرهای کنترلی است. برای جملهٔ دوم رابطهٔ (۱۰) به‌طرز مشابهی می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}&D\delta W^{(e)}(\phi, R_a \delta \mathbf{v}_a)[R_b \mathbf{u}_b] = \\ &D\Big(\delta \mathbf{v}_a \big(\mathbf{T}_a^{(e)} - \mathbf{F}_a^{(e)}\big)\Big)[R_b \mathbf{u}_b] = \\ &\delta v_a \Big(D\big(\mathbf{T}_a^{(e)} - \mathbf{F}_a^{(e)}\big)\Big)[R_b \mathbf{u}_b] = \delta \mathbf{v}_a . K_{ab}^{(e)} \mathbf{u}_b\end{aligned} \qquad (۲۴)$$

همان‌گونه که مشاهده می‌شود، از معادلهٔ (۲٤) تعریف ماتریس ضرایب $K_{ab}^{(e)}$ نتیجه می‌شود که در واقع مبین تغییرات نیرو در متغیر کنترلی a نسبت‌به تغییرمکان در متغیر کنترلی b در المان گرهی e است.

این ماتریس ضرایب از دو قسمت تشکیل می‌شود: اول، مؤلفه‌های ناشی از کار داخلی، که خود شامل دو بخش تنش ابتدایی $K_{\sigma, ab}^{(e)}$ و ساختار رفتاری $K_{c, ab}^{(e)}$ است و دوم، مؤلفهٔ ناشی از کار خارجی که به مؤلفهٔ نیروهای خارجی ماتریس ضرایب $K_{p, ab}^{(e)}$ موسوم است.

$$\mathbf{K}_{ab}^{(e)} = \mathbf{K}_{c,ab}^{(e)} + \mathbf{K}_{\sigma,ab}^{(e)} - \mathbf{K}_{p,ab}^{(e)} \qquad (۲۵)$$

$$[\mathbf{K}_{c,ab}^{(e)}]_{ij} = \int_{v^{(e)}} \sum_{k,l=1}^{3} \frac{\partial R_a}{\partial x_k} \tilde{c}_{ikjl} \frac{\partial R_b}{\partial x_l} dv; \; i,j=1,2,3 \qquad (۲٦)$$

$$[\mathbf{K}_{\sigma,ab}^{(e)}]_{ij} = \int_{v^{(e)}} \sum_{k,l=1}^{3} \frac{\partial R_a}{\partial x_k} \sigma_{kl} \frac{\partial R_b}{\partial x_l} \delta_{ij} dv; \; i,j=1,2,3 \qquad (۲۷)$$

$$[\mathbf{K}_{p,ab}^{(e)}]_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \Big[ k_{p,ab}^{(e)} \Big]_k \quad ; i,j=1,2,3 \qquad (۲۸)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{p,ab} &= \frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big( \frac{\partial R_a}{\partial \eta} R_b - \frac{\partial R_b}{\partial \eta} R_a \Big) da \\ &+ \frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial x}{\partial \eta} \Big( \frac{\partial R_a}{\partial \xi} R_b - \frac{\partial R_b}{\partial \xi} R_a \Big) da\end{aligned} \qquad (۲۹)$$

که پس از بازنویسی معادلات تعادل در فضای گسسته و استفاده از روش حل برمبنای تکرار نیوتن- رافسون روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\delta \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = -\delta \mathbf{v}^T \mathbf{R} \qquad (۳۰)$$

$$\mathbf{K}\,\mathbf{u}=-\mathbf{R}(\mathbf{x}_k)\;;\quad \mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{x}_k+\mathbf{u} \qquad (۳۱)$$

توجه به این مطلب ضروری است که اگرچه در مسائل غیرخطی وارد نمودن تمام بار خارجی در یک مرحله به‌صورت تئوری امکان‌پذیر می‌باشد، درعمل بار خارجی $\mathbf{F}$ در چند مرحله و به‌صورت یک‌سری افزایشی (Series of Increments) بر جسم اعمال می‌شود.

$$\mathbf{F}=\sum_{i=1}^{l}\Delta\mathbf{F}_i \qquad (۳۲)$$

لازم به توضیح است که در روش ایزوژئومتریک، برای تعریف هندسه و رویه جواب مسئله در فضای فیزیکی $\{x,y,z\}$ از فضای پارامتری $\{\xi,\eta,\varsigma\}$ استفاده می‌شود که توسط بردارهای گرهی تبیین می‌شوند. از سوی دیگر برای محاسبهٔ انتگرال‌ها به‌روش انتگرال‌گیری گوس، مشابه روش اجزای محدود، لازم است که نگاشتی از این فضا به فضای الگو $\{r,s,t\}$ انجام شود. به‌بیان‌دیگر انتگرال‌گیری در فضای فیزیکی با دو انتقال از فضای الگو به فضای پارامتریک و سپس به فضای فیزیکی همراه است. ماتریس‌های ژاکوبی نگاشت‌های اشاره شده چنین هستند:

$$\begin{aligned} dx\,dy\,dz &= \left(\det J_1\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta \\ &= \left(\det J_1 \det J_2\right)\ dr\ ds\ dt \end{aligned} \qquad (۳۳)$$

که در آن

$$J_1=\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \qquad (۳٤)$$

$$\begin{cases} \xi=\frac{1}{2}\left[\left(\xi_{i+1}-\xi_i\right)r+\left(\xi_{i+1}+\xi_i\right)\right] \\ \eta=\frac{1}{2}\left[\left(\eta_{i+1}-\eta_i\right)s+\left(\eta_{i+1}+\eta_i\right)\right] \\ \zeta=\frac{1}{2}\left[\left(\zeta_{i+1}-\zeta_i\right)t+\left(\zeta_{i+1}+\zeta_i\right)\right] \end{cases} \qquad (۳۵)$$

گام‌های الگوریتم حل مسائل هایپرالاستیسیته تراکم‌پذیر در زیر خلاصه شده و در ادامه فلوچارت حل در شکل (۱) آورده شده است.

۱. ورود مشخصات هندسه (بردارهای گره‌ای، وزن توابع پایه و نقاط کنترلی)، تعریف خصوصیات و پارامترهای مواد هایپرالاستیک و پارامترهای تحلیل مسئله شامل تعداد تقسیمات بار و دقت همگرایی در هر مرحله.

۲. اعمال حلقه سری افزایشی بار که در هر مرحله افزایش بار $\Delta\mathbf{F}_i$ توسط روابط زیر انجام می‌پذیرد.

$$\mathbf{R}_i=\mathbf{R}_i-\Delta\mathbf{R}_i \quad ; \quad \mathbf{F}_i=\mathbf{F}_i+\Delta\mathbf{F}_i$$

۳. اعمال حلقهٔ همگرایی در هر مرحله افزایش بار

الف) محاسبهٔ ماتریس ضرایب $\mathbf{K}_i$

ب) حل معادلهٔ $\mathbf{K}_i\,\mathbf{u}_p=-\mathbf{R}_i$

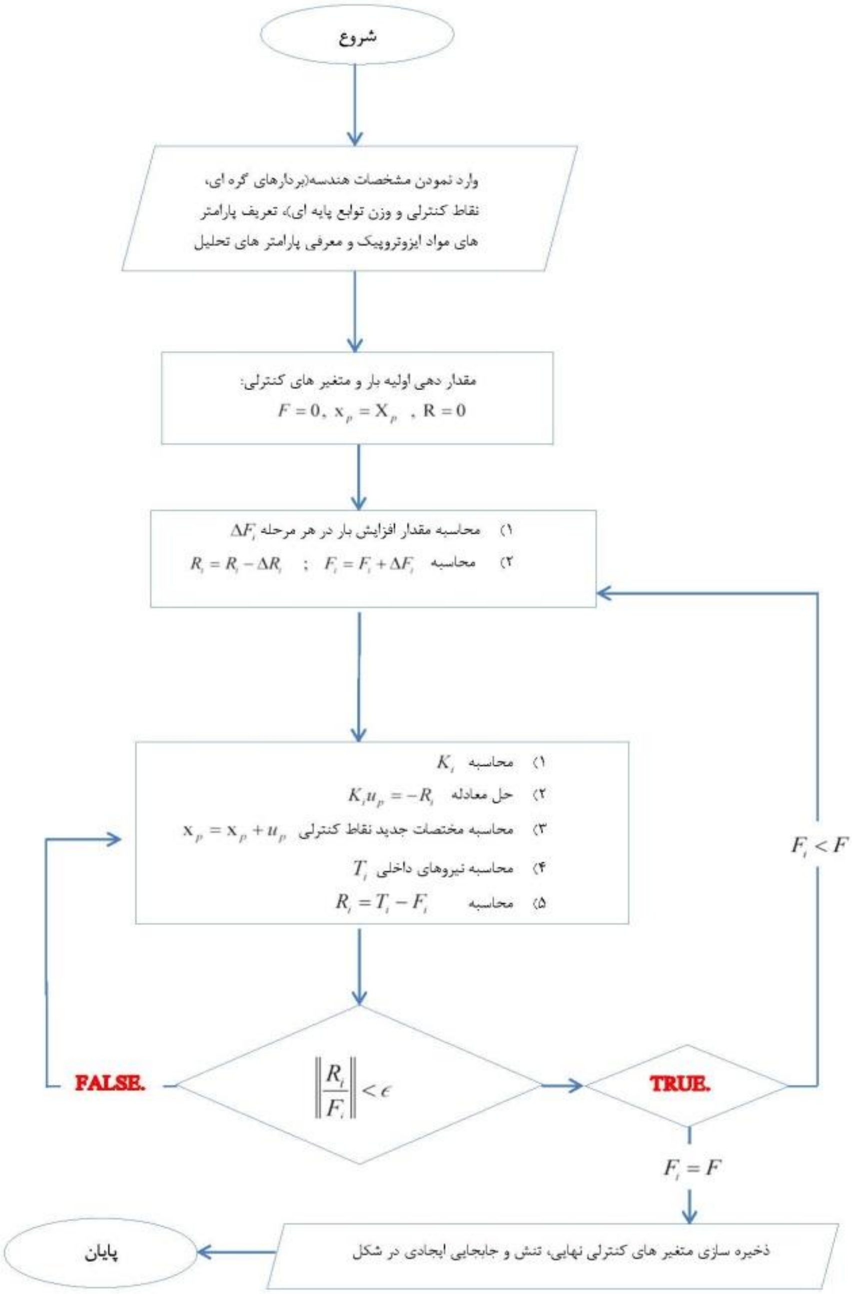
ج) یافتن مختصات جدید نقاط کنترلی $\mathbf{x}_p=\mathbf{x}_p+\mathbf{u}_p$

د) محاسبهٔ نیروهای داخلی $\mathbf{T}_i$

ه) محاسبهٔ باقی‌مانده $\mathbf{R}_i=\mathbf{T}_i-\mathbf{F}_i$

٤. اتمام حلقهٔ همگرایی.

۵. اتمام حلقهٔ سری افزایشی بار.




شکل ۱  الگوریتم روش تحلیل ایزوژئومتریک در مسائل هایپرالاستیسیتهٔ تراکم‌پذیر

### ارائهٔ مثال‌ها

در این بخش ابتدا با ارائهٔ یک مثال در مورد مسائل هایپرالاستیک تراکم‌پذیر با تغییرشکل‌های بزرگ، به مقایسهٔ جواب روش ایزوژئومتریک براساس الگوریتم ارائه شده IGLAGSHYP در این مقاله با نتیجهٔ روش اجزای محدود، که با استفاده از کد آکادمیک FLAGSHYP به‌دست آمده است، می‌پردازیم [17]. در ادامه به‌منظور بررسی اثر تعداد نقاط گوسی و تعداد تقسیمات بار دو مثال دیگر ارائه می‌شود. در این تحقیق از مصالح نئو–هوکین تراکم‌پذیر با تابع انرژی

کرنشی و پارامترهای به قرار زیر استفاده شده است که در آن، $\rho$ چگالی مصالح و $\mu$ و $\lambda$ ضرایب لازمه می‌باشند.

$$\begin{cases}\psi(C)=\frac{\mu}{2}(I_C-3)-\mu\ln J+\frac{\lambda}{2}(\ln J)^2\\ \rho=0\ ;\ \mu=100\ ;\ \lambda=100\end{cases}$$

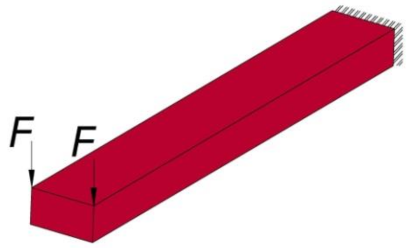
***مثال ۱- مدل‌سازی تیر طره تحت اثر بار در انتها.***

مدل تحلیلی ارائه‌شده در این مسئله، یک مکعب‌مستطیل با طول ۱۵، عرض ۲ و ارتفاع واحد می‌باشد. شرایط هندسی، بارگذاری و تکیه‌گاهی در شکل (۲) نشان داده شده است. بارگذاری در ۱۰ مرحله با تلرانس همگرایی $\epsilon=1\times10^{-10}$ به‌صورت سری افزایشی بر جسم وارد می‌شود. در روش اجزای محدود، از ۱۹۲۰ المان‌های هشت‌گره‌ای شش‌وجهی و ۲۷۴۵ گره و برای انتگرال‌گیری در هر المان از ۸ نقطهٔ گوسی استفاده شده است. در روش ایزوژئومتریک از توابع پایه بی‌اسپلاین درجه دو $(p=q=r=2)$ برای تقریب هندسه و توابع مجهول استفاده شده و بردارهای گره‌ای به‌صورت زیر درنظر گرفته شده‌اند.

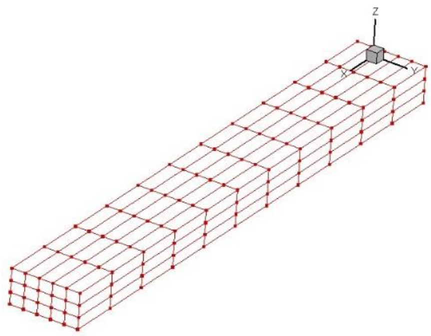
$$\xi=\{0, 0, 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1, 1, 1\}$$
$$\eta=\{0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1\}$$
$$\zeta=\{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$$

برای انتگرال‌گیری در هر المان گره‌ای از ٦٤ نقطهٔ گوسی استفاده شده است. با در نظر داشتن رابطهٔ $m=n+p+1$ تعداد نقاط کنترلی در هر راستا به‌صورت زیر است.

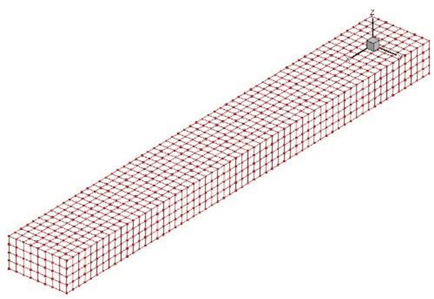
$$P_\xi=12\ ;\ P_\eta=6\ ;\ P_\zeta=4\ ;\ P_{totall}=288$$




(الف)



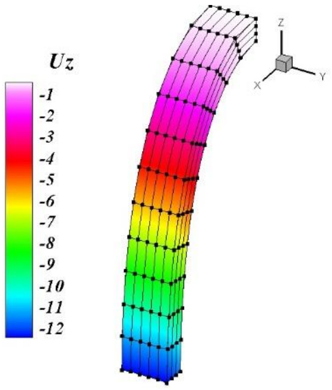
(ب)



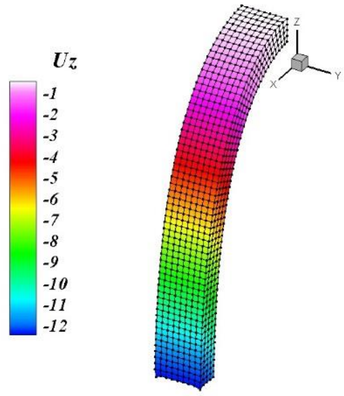
(ج)

شکل ۲ تعریف مثال ۱- الف) هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی، ب) شبکهٔ کنترلی در روش ایزوژئومتریک و ج) مش‌بندی اولیه در روش اجزای محدود

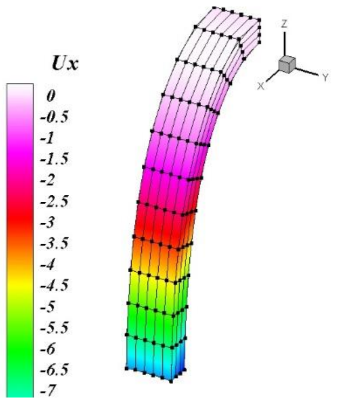
نتایج حاصل از حل ایزوژئومتریک و اجزای محدود در شکل‌های (۳ و ٤) و نیز جدول (۱) ارائه شده است.



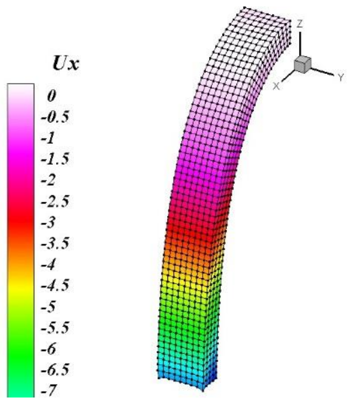

(الف)



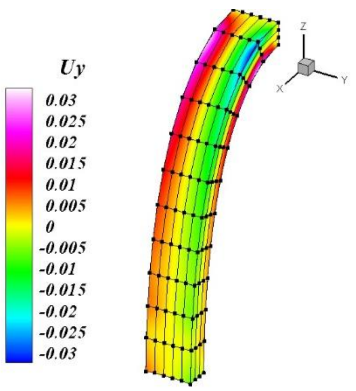

(ب)



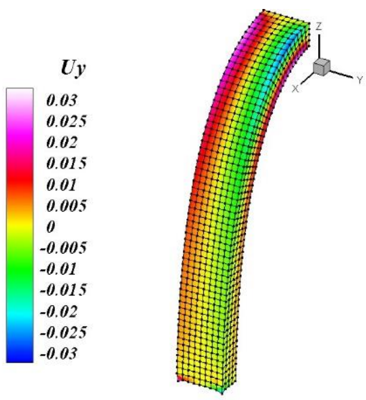

(ج)




(د)

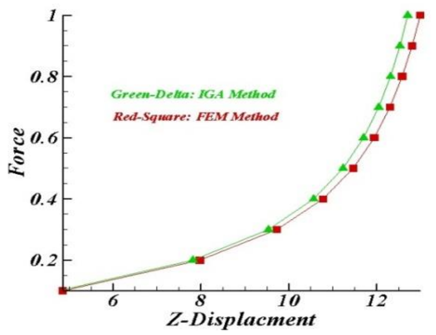



(ه)




(و)

شکل ۳ (الف) کانتور جابه‌جایی در راستای Z در روش ایزوژئومتریک به‌همراه شبکهٔ کنترلی تغییریافته، (ب) کانتور جابه‌جایی در راستای Z در روش اجزای محدود، (ج) کانتور جابه‌جایی در راستای X در روش ایزوژئومتریک به‌همراه شبکهٔ کنترلی تغییریافته، (د) کانتور جابه‌جایی در راستای X در روش اجزای محدود، (ه) کانتور جابه‌جایی در راستای Y در روش ایزوژئومتریک به‌همراه شبکهٔ کنترلی تغییریافته، (و) کانتور جابه‌جایی در راستای Y در روش اجزای محدود.




شکل ٤ نمودار بار- جابه‌جایی در نقطهٔ اعمال بار مربوط به مثال ١

جدول ١ نسبت تغییرات حجم آغازین و پایانی در روش اجزای محدود و ایزوژئومتریک مربوط به مثال ١

| | حجم اولیه (متر مکعب) | حجم پایانی (متر مکعب) | نسبت تغییر حجم (J) |
|---|---|---|---|
| روش اجزای محدود | 30.000000 | 30.037631 | 1.00125 |
| روش ایزوژئومتریک | 30.000000 | 30.037242 | 1.00124 |

باتوجه‌به نتایج ارائه‌شده در این مثال ملاحظه می‌شود که استفاده از روش اجزای محدود باعث ایجاد دستگاه معادلات بزرگتر و درنتیجه حجم محاسباتی بالاتر شده است. همچنین بادقت در شکل تغییرشکل‌یافتهٔ مسئله، به‌ویژه در انتهای تیر طره، نیاز به فرآیند مش‌بندی مجدد نیز قابل مشاهده می‌باشد. به‌نظر می‌رسد علت این بهبود استفاده از توابع پایه با قابلیت انعطاف بالا در ایجاد هندسه مدل در روش ایزوژئومتریک است.

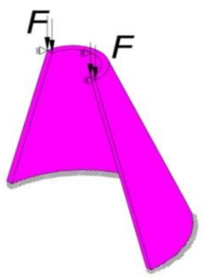
***مثال ۲- مسئلهٔ نیم‌مخروط ناقص تحت فشار خارجی.*** دراین مسئله به بررسی تأثیر نقاط گوسی در همگرایی جواب پرداخته شده است. مدل هندسی ارائه‌شده در این مسئله یک نیم‌مخروط ناقص با شعاع متوسط ابتدائی ۲/۹، انتهائی ۰/۹، ضخامت ۰/۲ و ارتفاع ٦ می‌باشد. شرایط هندسی، بارگذاری و تکیه‌گاهی در شکل (۵) نشان داده شده است. بار در ۲۰۰ مرحله با مقدار همگرایی $\epsilon = 1\times10^{-10}$ به‌صورت سری افزایشی برجسم وارد می‌شود. از توابع پایه نربز درجه دو $(p=q=r=2)$ برای تقریب هندسه و توابع مجهول استفاده شده و بردارهای گره‌ای به‌صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$\xi=\{0, 0, 0, 0.5, 0.5, 1, 1, 1\}$$
$$\eta=\{0, 0, 0, 1, 1, 1\}\ ,\ \zeta=\{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$$

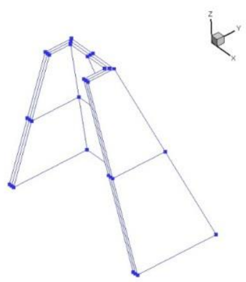
برای انتگرال‌گیری در هر المان گره‌ای از $A_i^3$ نقطهٔ گوسی استفاده شده است که $A_i$ تعداد گوسی در هر راستا می‌باشد. به‌منظور بررسی اثر نقاط گوسی بر جواب مسئله $A_i = 3,4,6$ درنظر گرفته شده است. بااستفاده از رابطهٔ $m=n+p+1$ تعداد نقاط کنترلی به‌صورت زیر است.

$$P_\xi=5\ ;\ \ P_\eta=3\ ;\ \ P_\zeta=3\ \ \ ;\ \ P_{totall}=45$$

مقدار وزن توابع نربز درنظر گرفته‌شده برای این مثال باتوجه‌به شکل (۵-ب) در گوشه‌ها برابر ۰/۷۰۷ می‌باشد.



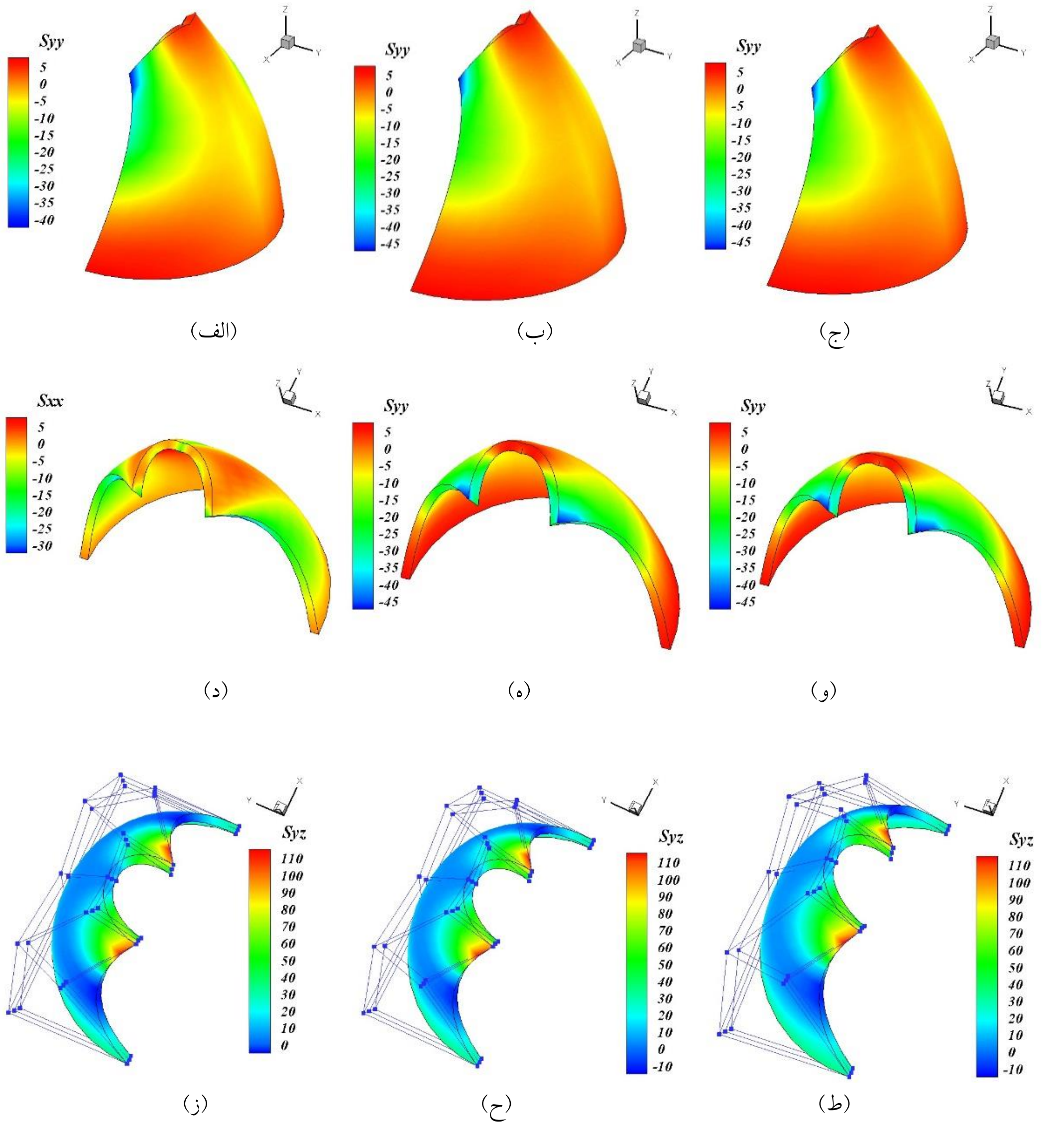

(الف)



(ب)

شکل ۵ تعریف مسئلهٔ ۲ (الف) هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی (ب) شبکهٔ کنترلی در روش ایزوژئومتریک

نتایج در شکل (٦) نشان داده شده است.




شکل ٦ (الف) کانتور تنش $\sigma_{yy}$ با ۲۷ نقطهٔ گوسی (ب) کانتور تنش $\sigma_{yy}$ با ٦٤ نقطهٔ گوسی (ج) کانتور تنش $\sigma_{yy}$ با ۲۱٦ نقطهٔ گوسی (د) کانتور تنش $\sigma_{xx}$ با ۲۷ نقطهٔ گوسی (ه) کانتور تنش $\sigma_{xx}$ با ٦٤ نقطهٔ گوسی (و) کانتور تنش $\sigma_{xx}$ با ۲۱٦ نقطهٔ گوسی (ز) کانتور تنش $\tau_{xz}$ با ۲۷ نقطهٔ گوسی به‌همراه شبکهٔ کنترلی تغییریافته (ح) کانتور تنش $\tau_{xz}$ با ٦٤ نقطهٔ گوسی به‌همراه شبکهٔ کنترلی تغییریافته (ط) کانتور تنش $\tau_{xz}$ با ۲۱٦ نقطهٔ گوسی به‌همراه شبکهٔ کنترلی تغییریافته

باتوجه‌به استفاده از روش انتگرال‌گیری عددی در نقاط گوسی، یافتن تعداد نقاط گوسی بهینه در هر راستا بدون کاهش در دقت جواب مسئله باعث افزایش سرعت حل و کاهش زمان محاسبات می‌گردد. نتایج ارائه شده در این مثال نشان می‌دهد با مرتبهٔ چندجمله‌ای $(p=q=r=2)$ انتخاب ٤ نقطهٔ گوسی در هر راستا مناسب است.

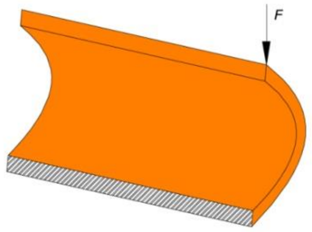
***مثال ۳- مدل‌سازی صفحهٔ خمیده تحت فشار خارجی.*** دراین مسئله به بررسی تأثیر تعداد تقسیمات بار در همگرایی جواب پرداخته شده است. مدل تحلیلی ارائه‌شده در این مسئله یک صفحهٔ خمیده با شعاع تقریبی متوسط ۹، ضخامت ۱ و طول ۱۸ می‌باشد. شرایط هندسی، بارگذاری و تکیه‌گاهی در شکل (۷) نشان داده شده است. بار در مرحلهٔ A با

مقدار همگرایی $\epsilon = 1\times10^{-10}$ به‌صورت سری افزایشی بر جسم وارد می‌شود. به‌منظور بررسی اثر تعداد تقسیمات بار بر جواب مسئله A=10,20,50,100 درنظر گرفته شده است. از توابع پایهٔ ب- اسپلاین درجهٔ $(p=q=r=2)$ برای تقریب هندسه و توابع مجهول استفاده شده و بردارهای گره‌ای به‌صورت زیر درنظر گرفته شده‌اند.

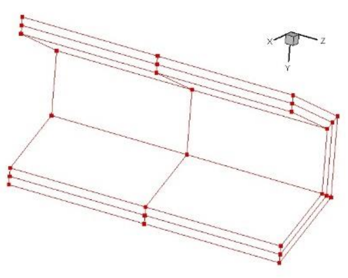
$$\xi = \{0, 0, 0, 0.5, 0.5, 1, 1, 1\}$$
$$\eta = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\} \quad \zeta = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$$

برای انتگرال‌گیری در هر المان گره‌ای از ٦٤ نقطهٔ گوسی استفاده شده است. بااستفاده از رابطه $m=n+p+1$ تعداد نقاط کنترلی در هر راستا به‌صورت زیر است.

$$P_\xi = 4 \;;\; P_\eta = 3 \;;\; P_\zeta = 3 \;;\; P_{totall} = 36$$



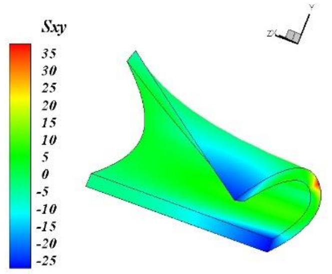

(الف)



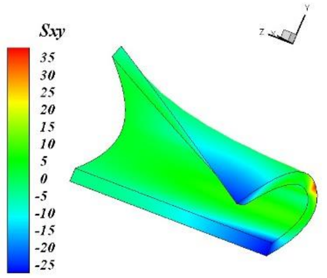

(ب)

شکل ۷ تعریف مسئلهٔ۳ (الف) هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی (ب) شبکهٔ کنترلی در روش ایزوژئومتریک

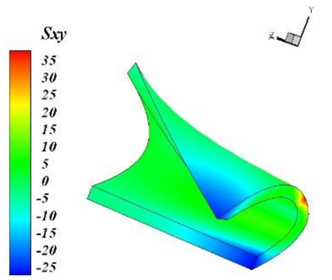
نتایج در شکل (۸ و ۹) ارائه شده است.



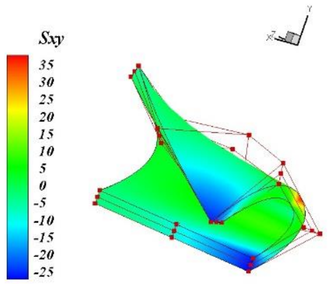

(الف)




(ب)

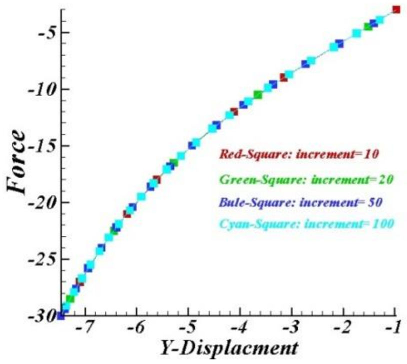



(ج)




(د)

شکل ۸ (الف) کانتور تنش $\tau_{xy}$ با تعداد تقسمات بار=۱۰
(ب) کانتور تنش $\tau_{xy}$ با تعداد تقسمات بار=۲۰
(ج) کانتور تنش $\tau_{xy}$ با تعداد تقسمات بار=۵۰ (د) کانتور تنش $\tau_{xy}$ با تعداد تقسیمات بار= ۱۰۰ به‌همراه شبکهٔ کنترلی تغییریافته




شکل ۹ نمودار بار-جابه‌جایی در نقطهٔ اعمال بار مربوط به مثال ۳

باتوجه‌به نتایج ارائه‌شده در این مثال در مسائل هایپرالاستیسیتهٔ تراکم‌پذیر جواب نهایی مستقل از تعداد تقسیمات بار می‌باشد.

## نتیجه‌گیری

در این مقاله به کاربرد روش تحلیلی ایزوژئومتریک جهت فرمول‌بندی مسائل غیرخطی با تغییرشکل‌های بزرگ الاستیک تراکم‌پذیر که به‌عنوان مسائل هایپرالاستیسیته شناخته می‌شوند، پرداخته شده است. بدین‌منظور جهت استخراج ماتریس ضرایب با بهره‌گیری از مفهوم ایزوژئومتریک، پس از خطی‌سازی روابط حاکم بر این دسته از مسائل، معادلات تعادل در فرم گسسته‌شدهٔ آن نوشته شد و الگوریتمی برای تحلیل این دسته از مسائل معرفی گردید. جهت بررسی و صحت نتایج ارائه‌شده در مسائل هایپرالاستیسیتهٔ تراکم‌پذیر نتایج روش اجزای محدود و روش ایزوژئومتریک با یکدیگر مقایسه شد.

باتوجه‌به نتایج ارائه‌شده، روش ایزوژئومتریک درمقایسه‌با روش اجزای محدود به دستگاه معادلات کوچکتری منجر شده و وابستگی جواب مسئله به شبکهٔ المان‌ها و درنتیجه نیاز به تولید مجدد مش را تا حدود بسیار زیادی منتفی می‌نماید. باتوجه‌به استفاده از روش انتگرال‌گیری عددی در نقاط گوسی، یافتن تعداد نقاط گوسی بهینه در هر راستا بدون کاهش در دقت جواب مسئله باعث افزایش سرعت حل و کاهش زمان محاسبات می‌گردد. نتایج نشان می‌دهد با مرتبهٔ چندجمله‌ای $(p=q=r=2)$ انتخاب ٤ نقطهٔ گوسی در هر راستا مناسب است. به‌علاوه نشان داده شد که در مسائل هایپرالاستیسیته جواب نهایی مستقل از تعداد تقسیمات بار می‌باشد.

## واژه‌نامه

| | |
|---|---|
| ایزوژئومتریک | Isogeometric |
| ب- اسپلاین | Bspline |
| تابع انرژی کرنشی | Strain energy function |
| تراکم‌پذیر | Compressible |
| گرادیان تغییرشکل | Deformation gradient |
| نربز | Nurbs |
| نقاط کنترلی | Control point |
| هایپرالاستیسیته | Hyperelasticity |
| فضای فیزیکی | Physical space |
| فضای پارامتری | Parameter space |

## مراجع

1. Tuner, M.J., Drill, E.H., Martin, H.C. and Melosh, R.J., "Large deflection of structures subject to heating and external load", *Journal Aerospace Sciences*., Vol. 27, pp. 97-106, (1960).
2. Kapur, W.W. and Hartz, B.J., "Stability of plates using the finite element method", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 92, pp. 177-195, (1966).
3. Gallagher, R.J. and Padlog, J., "Discrete element approach to strucural stability", ", *Journal of*

*Aeronautics & Astronautics* , Vol. 1, No. 6, pp. 1437-1439, (1963).
4. Gallagher, R.J., Gellatly, R.A., Padlog, J. and Mallet, R.H., "A discrete element procedure for thin shell instability analysis", *Journal of Aeronautics & Astronautics*, Vol. 5, No. 1, pp. 138-145, (1967).
5. Holand, I. and Moan, T., "The finite element in plate buckling", Finite Element Methods in Stress Analysis, (1969).
6. Argyris, J.H., "*Recent Advance in Matrix Method of Structure Analysis*, *Progress in Aeronautical Sciences*, (1964).
7. Argyris, J.H.,"Countinua and discountinua", Proc, conf, Matrix Methods in Struct, mech, *Air Force Institute of Technology*, Wright Patterson Air Force Base, Ohio, Octobr (1965).
8. Oden, J.T., "Numerical Formulation of non-linear elasticity problems", *Journal of the Structural Division*, Vol. 93, pp. 5290, (1967).
9. Mallet, R.H. and Marcal, P.V., "finite element analysis of non-linear structures", *Journal of the Structural Division*, Vol. 94, pp. 2081-2105, (1968.)
10. Oden, J.T., "Finite elemnt application in non-linear structural analysis", Proc, Conf, on Finite elemnt Meth, Vanderbilt University Tennessee, 18 November (1969).
11. Haisler, W.E., Stricklin, J.E. and Stebbins, F.J., "Development and evaluation of solution procedures for geometrically non-linear structural analysis by the discrete stiffnes method", AIAA/ASME, 12$^{th}$ structure, Structural Dynamics & Materials Conf, Anaheim, californa, 24 April (1971).
12. Zinckiewicz, O.C.,"*The Finite Element in Engeneering Science*", Mc Graw-Hill, London, (1971).
13. Brebbia, C. and Connor, J., "Geometrically non-linear finite element analysis", *Journal of the Structural Division*, pp. 6516, (1969).
14. Crisfield, M.A., "*Nonlinear finite element analysis of solids and structures*", Vol. I & Vol. II, John Wiley & Sons, (1991).
15. Belytschko, T., Liu, W.K. and Moran, B., "*Nonlinera Finite Element for Countinua and Structures*", John Wiley & Sons, (2000).
16. Zinkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., "The finite element method, Vol. II, 5$^{nd}$ edition", McGraw Hill, (2000).
17. Bonet, J. and Wood, R.D., "*Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*, 2$^{nd}$ edition", Cambridge University Press, (2008).
18. Wriggers, P.," *Nonlinear finite element methods*", Springer, (2008).
19. Qiang, Z. and Qing-Sheng, Y., "Effects of large deformation and material nonlinearity on spherical indentation of hyperelastic soft materials", *Mechanics Research Communications*, Vol. 84, pp. 55-59, (2017).
20. Clayton J.D , "Geometry of nonlinear elastic solids with internal structure", *Journal of Geometry and Physics*, Vol. 112, pp. 118-146, (2017).
21. Piegel, L. and Wayne, T., "*The Nurbs Book, 2$^{nd}$ edition*", Springer,(1996).
22. Rogers, D.F., "*An Introduction to NURBS with Historical Perspective*", Morgan Kaufmann Publishers, (2001).
23. Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A. and Bazilevs, Y., "Isogeometric analysis: Cad, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, pp. 4135–4195, (2005).
24. Penter, P.M., "*Splines and Variational Methods*", John Wiley & Sons, (1989).
25. Hölling, K.," Finite elemnt methods with B-Splines", Society for industrial and applied mathematics Philadelphia, (2003).
26. Kadapa, C., Dettmer, W.G. and Perić, D., "Subdivision based mixed methods for isogeometric analysis of linear and nonlinear nearly incompressible materials", *Computer Methods in Applied*

*Mechanics and Engineering*, Vol. 305, pp. 241-270, (2016).
27. Nguyen, X., Atroschchenko, E. and nguyen, H., "Geometrically nonlinear isogeometric analysis of functionally graded microplates with the modified couple stress theory", *Computers & Structures*, Vol. 193, pp. 110-127, (2017).
28. Bauer, A.M., Breitenberger, M., Philipp, B., Wüchner, R. and Bletzinger, K.-U., "Nonlinear isogeometric spatial Bernoulli beam", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 303, pp. 101-127, (2016).
29. Antolin, P., Bressan, A., Buffa, A. and Sangalli, G., "An isogeometric method for linear nearly-incompressible elasticity with local stress projection", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 316, pp. 694-719, (2017).
30. Cottrell, J.A., Hughes, T.J.R. and Bazilves, Y., "*Isogeometric Analysis: toward integration of CAD and FEA*", John Wiley& Sons, (2009).
31. Bazilevs, Y., Beirao, L., Cottrell, J., Hughes, T.J.R. and Sangalli, G.," Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for h-refined meshes", *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Vol. 16, pp. 1031–1090, (2006).
32. Bazilevs, Y., Calo, V., Cottrell, J., Hughes, T., Reali, A. and Scovazzi, G.," Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 197, pp. 173–201, (2007).
33. Bazilevs, Y., Calo, V.M., Zhang, Y. and Hughes, T.J.R., "Isogeometric fluid structure interaction analysis with applications to arterial blood flow", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 38, No. 4, pp. 310–322, (2006).
34. Cottrell, J.A., Reali, A., Bazilevs, Y. and Hughes, T.J.R., "Isogeometric analysis of structural vibrations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, pp. 5257–5296, (2006).
35. Elguedj, T., Bazilevs, Y., Calo, V.M. and Hughes, T.J.R., " $\bar{\boldsymbol{B}}$ and $\bar{F}$ projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order NURBS elements", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 197, pp. 2732-2762, (2008).
36. Hassani, B. and Moghadam, N.Z., "Development of a new numerical method for solution of ordinary differential equations by using spline basis functions", *Technical Report*, No. 1015, *Shahrood University of Technology*, Iran, (2009), (In Farsi).
37. Hassani, B., Moghaddam, N.Z. and Tavakkoli, S.M.," Isogeometric solution of Laplace equation", *Asian Journal of Civil Engineering*, Vol. 10, No. 5, pp. 579-592, (2009).